# 複素射影空間のケーラー部分多様体のスペクトル幾何について(リーマン多様体とリー群)

数理解析研究所講究録
576巻 1985年 75-99



# 複素射影空間のケーラー部分多様体のスペクトル幾何について

都立大理学部　宇田川　誠一　(Seiichi Udagawa)

## §0. 概略

$\psi: M^n \longrightarrow E^N$ を $n$ 次元 compact リーマン多様体から，$N$ 次元ユークリッド空間への等長はめこみとする．$\Delta$, $\mathrm{spec}(M)=\{0<\lambda_1\cdots\lambda_1<\lambda_2\cdots\lambda_2<\cdots\}$ によって，それぞれ，$M$ のラプラシアン，$M$ のスペクトラムを表わすことにする．このとき，$\psi=\psi_0+\sum_{k\in\mathbb{N}}\psi_k$, $\Delta\psi_k=\lambda_k\psi_k$, と分解され，和は，$C^\infty(M)$ 上 $L^2$-位相で，成分ごとに収束する．ここで，$\psi_0$ は，定値写像であり，$M$ の<u>重力の中心</u>といわれる．

<u>定義 1</u>．$\psi$ が，$\psi=\psi_0+\psi_k$, $k\in\mathbb{N}$, $\psi_k\neq 0$ となるとき，$\psi$ は，<u>order</u>$\{k\}$ であると言い，$\psi=\psi_0+\psi_k+\psi_l$, $l>k>0$, $k,l\in\mathbb{N}$, $\psi_k,\psi_l\neq 0$ のとき，<u>order</u>$\{k,l\}$ であると言い，以下同様に，$\psi=\psi_0+\psi_{k_1}+\psi_{k_2}+\cdots+\psi_{k_s}$, $k_s>k_{s-1}>\cdots>k_1>0$, $k_1,\cdots,k_s\in\mathbb{N}$, $\psi_{k_1}\cdots\cdots\psi_{k_s}\neq 0$, のとき，<u>order</u>$\{k_1,k_2,\cdots,k_s\}$ であるということにする．

よく知られたTakahashiの定理から，$\psi$が order$\{k\}$ であるための必要十分条件は，Mが，$E^N$の hypersphere $S^{N-1}$ の中で minimal であることである．したがって，一般に，order$\{k_1, \cdots, k_s\}$ $(s \geq 2)$ であるための必要十分条件は何かという問題が生じるが，これは，非常に困難な問題であると思われるので，特に，我々は，$i : M^n \longrightarrow \mathbb{C}P^m$ を，$n$次元 compact Kaehler 部分多様体から，正則断面曲率 1 の $m$次元複素射影空間への Kaehler immersion (holomorphic isometric immersion) とし，$F : \mathbb{C}P^m \longrightarrow E^N$ を first standard imbedding とし，合成写像 $\psi = F \circ i$ について，上に述べた事を考えたいと思う．以下，特にことわらない限り，$\psi$が order$\{k_1, \cdots, k_s\}$ と言うかわりに，Mが order$\{k_1, \cdots, k_s\}$ ということにする

まず，A. Ros [8,9] によって以下の事実が得られている

<u>定理A</u>． M を $\mathbb{C}P^m$ の compact Kaehler 部分多様体とする．このとき，Mが order$\{k\}$, $k \in \mathbb{N}$ (i.e. $S^{N-1}$ で minimal) であるための必要十分条件は，M が $\mathbb{C}P^m$ で totally geodesic であることである．

<u>定理B</u>． M を $\mathbb{C}P^m$ の compact Kaehler 部分多様体で，かつ immersion は full とする (i.e. $\mathbb{C}P^m$ のいかなる totally geodesic Kaehler 部分多様体にもはいらない)．このとき，Mが order$\{k, l\}$ であるための必要十分条件は，M が Einstein

で，かつ，$T = k g|_{NM \times NM}$，$k(\neq 0) \in \mathbb{R}$，が成りたつことである．ここで，$NM$ は，$M$ の normal bundle で，$g$ は，$\mathbb{C}P^m$ の Kaehler metric，$T = (T_{\lambda\mu})$ は，$T_{\lambda\mu} = \mathrm{trace}\, A_{\xi_\lambda} A_{\xi_\mu}$，$\xi_\lambda, \xi_\mu \in NM$ であり，$A_{\xi_\lambda}$ は，$\xi_\lambda$ 方向の，second fundamental tenser である．

注意 1. Totally geodesic Kaehler 部分多様体は，order$\{1\}$ であることが，確かめられる．したがって，order$\{k\}$ $(k \geqq 2)$ の Kaehler 部分多様体は，存在しない．また，Einstein 平行部分多様体（$M$ の $\mathbb{C}P^m$ における second fundamental form が平行）で，totally geodesic のもの以外は，order$\{1, 2\}$ であることが，確かめられる．

定理 B に関連して，次を得た

定理 1. [13] $M$ を $\mathbb{C}P^m$ の compact Kaehler 部分多様体で，かつ，Immersion は full で，totally geodesic ではないとする

このとき，以下の条件は，互いに同値である．

i) $M$ は，Einstein 平行部分多様体，

ii) $M$ は，order$\{1, 2\}$，

iii) $M$ は，order$\{k, l\}$，$l > k > 0$，$k, l \in \mathbb{N}$，

iv) $M$ は，Einstein で，かつ，$T = k g|_{NM \times NM}$．

v) $M$ は，Einstein で，かつ，$NM$ は，(Induced metric に関して) Einstein Kaehler metric を許容する

注意 2. ii) と iii) の同値性により，order{1, 2} 以外に，order{k, l} である Kaehler 部分多様体は，存在しないことがわかる．条件 V) は，§4 で説明される．また，order{k, l, m} については，first-canonical に imbedded された rank 3 の compact irreducible Hermitian symmetric spaces と，$\mathbb{C}P^n$ の third-canonical Veronese imbedding と $\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1$ の first-canonical imbedding は，order{1, 2, 3} であることが確かめられる．$\mathbb{C}P^n\times\mathbb{C}P^n\times\mathbb{C}P^n$ $(n\geq 2)$ の first-canonical imbedding は，order{1, 2, 4} であることが確かめられる．

定義 2. $M_i$ を rank $r_i$ の compact irreducible Hermitian symmetric space とし，$f_{p_i}: M_i \longrightarrow \mathbb{C}P^{m(i)}$ を $p_i$-th full Kaehler imbedding とする．$f$ を $f_{p_i}$ $(i=1,\cdots,s)$ のテンソル積とするとき，$\sum_{i=1}^{s} r_i p_i$ を $f$ の degree ということにする．

スペクトラル幾何について，まず，次の結果が得られている：

定理 C. (N. Ejiri, A. Ros [9])

$M$ を，$\mathbb{C}P^m$ の $n$ 次元 compact Kaehler 部分多様体とするとき，

$$(0.1) \qquad \lambda_1 \leq n+1$$

である．等号成立の必要十分条件は，$M$ が，totally geodesic (i.e. degree 1) であることである．

定理1と[9]の定理5.2を合わせると次が得られる.

定理2. (A. Ros, S. Udagawa)

$M$ を $\mathbb{C}P^m$ の $n$ 次元 compact Kaehler 部分多様体とし, $\tau$ を $M$ の scalar curvature とする. このとき,

$$(0.2) \quad n[n+1+(n+1-\lambda_1)(n+1-\lambda_2)]\,\mathrm{VoL}(M) \geqq \int_M \tau ,$$

が成り立つ. Immersion が full であれば, 等号成立の必要十分条件は, $M$ が Einstein 平行部分多様体であることである.

定理2の系として, 以下の結果が得られる.

定理3.

$M$ を $\mathbb{C}P^m$ の $n$ 次元 compact Kaehler 部分多様体とする. もし, $\lambda_1 \leqq \int_M \tau \big/ [n\,\mathrm{VoL}(M)]$ で, $M$ が totally geodesic でなければ,

$$(0.3) \quad \lambda_2 \leqq n+2$$

である. 等号成立の必要十分条件は, (Immersion が full ならば) $M$ が Einstein 平行部分多様体であることである.

定理4.

$M$ を $\mathbb{C}P^m$ の compact Kaehler 部分多様体とし, Immersion は full とする. $\hat{M}$ を Einstein 平行部分多様体とする. もし, $\mathrm{Spec}(M) = \mathrm{Spec}(\hat{M})$ なら, $M = \hat{M}$ である.

注意3. [6]により正の scalar curvature をもつ, $n$次元 compact Einstein Kaehler 多様体に対して, $\lambda_1 \geq \frac{c}{n}$ が成り立つ. 等号成立の必要十分条件は, $M$が, a one-parameter group of isometries を許容することである.

注意4. 定理2は, A. Ros [9]が, 不等式及び, 等号が成り立てば, $M$はEinsteinで, $T = kg|_{NM \times NM}$ であることを証明している. 定理3, 4は, 例外型のEinstein平行部分多様体 $E_6/Spin(10) \times T$ 以外のEinstein平行部分多様体については, A. Ros [9]が得ている. つまり, 定理2とは, 独立に, 定理3の等号の必要十分条件が, "$M$がEinstein平行部分多様体"ということを, [9]において, 示していたが, $E_6/spin(10) \times T$ の $\lambda_2$ が求められていなかったのである. Classical type については, Nagano [4]が求めている.

定理5.

$M$を $\mathbb{C}P^m$ の compact Einstein Kaehler 部分多様体とし, Immersion は full とする. $\widehat{M}$を degree 3 の Einstein compact Hermitian symmetric 部分多様体とする.

もし, $Spec(M) = Spec(\widehat{M})$ なら, $M = \widehat{M}$ である.

## §1. 準備.

$x : M^n \longrightarrow E^N$ を$n$次元 compact Rieman. 多様体から,

N次元ユークリッド空間への isometric immersion とし，H を M の $E^N$ における mean curvature vector とする．

このとき，次を得る．

(1.1) $\Delta x = -nH = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k x_k$,

(1.2) $\Delta^2 x = -n\Delta H = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k^2 x_k$,

(1.3) $\Delta^3 x = -n\Delta^2 H = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k^3 x_k$.

ここで，$g$ をユークリッド metric とするとき，

$$\int_M g(x_k, x_l) = 0 \qquad \text{for } k \neq l,$$

であるから，

$$\int_M g(x_k, x_k) = a_k$$

とおく．このとき，

$$-n\int_M g(x, H) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k a_k, \qquad n^2\int_M g(H, H) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k^2 a_k,$$

$$n^2\int_M g(H, \Delta H) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k^3 a_k, \qquad n^2\int_M g(\Delta H, \Delta H) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k^4 a_k,$$

である．

ここで，また，

$$\Phi_1 = n^2\int_M g(H, H) + n\lambda_1\int_M g(x, H),$$

$$\Phi_2 = n^2\int_M g(H, \Delta H) - n^2\lambda_1\int_M g(H, H), \quad \Phi_3 = n^2\int_M g(\Delta H, \Delta H) - n^2\lambda_1\int_M g(H, \Delta H),$$

とおけば，次を得る．

(1.4) $\Phi_1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k(\lambda_k - \lambda_1) a_k \geq 0$,

(1.5) $\Phi_2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k^2(\lambda_k - \lambda_1) a_k \geq 0$,

$$(1.6)\quad \Phi_3=\sum_{k\in N}\lambda_k^3(\lambda_k-\lambda_1)a_k\geqq 0,$$

$$(1.7)\quad \Phi_4:=\Phi_2-\lambda_2\Phi_1=\sum_{k\in N}\lambda_k(\lambda_k-\lambda_2)(\lambda_k-\lambda_1)a_k\geqq 0,$$

$$(1.8)\quad \Phi_5:=\Phi_3-\lambda_2\Phi_2-\lambda_3\Phi_4$$
$$=\sum_{k\in N}\lambda_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)(\lambda_k-\lambda_3)a_k\geqq 0.$$

(1.4)〜(1.6) において，等号は，order{1} のときに限り成り立つ．(1.7) においては，order{1}, order{2}, order{1, 2} のいずれかのときに限り，また，(1.8) においては，order{1}, order{2}, order{3}, order{1, 2}, order{1, 3}, order{2, 3}, order{1, 2, 3} のいずれかのときに限り，等号が成り立つ．

§2．Kaehler 部分多様体 I．

$HM(m+1)=\{P\in gl(m+1, \mathbb{C})\mid \bar{P}={}^tP\}$ とし，metric $g$ を

$$g(P, Q)=2\,\mathrm{trace}(PQ)\quad \text{for}\quad P, Q\in HM(m+1)$$

で定義する．$\mathbb{C}P^m$ を正則断面曲率 1 の複素射影空間とするとき，$\mathbb{C}P^m$ の $HM(m+1)$ への imbedding $F$ は，次で定義される：

$$F(\mathbb{C}P^m)=\{P\in HM(m+1)\mid P^2=P,\ \mathrm{trace}\,P=1\}$$

$F$ は，$\mathbb{C}P^m$ の $H_1M(m+1):=\{P\in HM(m+1)\mid \mathrm{trace}\,P=1\}$ への full isometric imbedding を定義する．以下，特にことわらない限り，$\mathbb{C}P^m$ と $F(\mathbb{C}P^m)$ を同一視することにする．

$M^n$ を $\mathbb{C}P^m$ の $n$ 次元 compact Kaehler 部分多様体とする．

$\sigma$, $A$, $H$ によって，それぞれ，$M$ の $\mathbb{C}P^m$ における second fundamental form，対応する shape operator，$M$ の $H_1M(m+1)$ における mean curvature vector を表わすことにする．$M$ が $\mathbb{C}P^m$ で minimal であることと，$F$ の second fundamental form が平行であること等を用いて，$\Delta H$ を計算することにより，A. Ros [9] は次を得た．

<u>Lemma 2.1</u>　$P: M^n \longrightarrow \mathbb{C}P^m$ を isometric immersion とする．

$$(2.1)\quad g(P,P) = 2,$$

$$(2.2)\quad g(P,H) = -1,$$

$$(2.3)\quad g(P,\Delta H) = -(n+1),$$

$$(2.4)\quad g(H,H) = (n+1)/2n,$$

$$(2.5)\quad g(H,\Delta H) = (n+1)^2/2n + (1/2n^2)\|\sigma\|^2,$$

$$(2.6)\quad g(\Delta H,\Delta H) = (n+1)^3/2n + [(n+1)/n^2]\|\sigma\|^2 + (1/n^2)\sum_{\lambda,\mu=1}^{m-n}(\operatorname{trace} A_\lambda A_\mu)^2 + (1/n^2)\operatorname{trace}\Big(\sum_{\lambda=1}^{m-n} A_\lambda^2\Big)^2,$$

が成り立つ．ここで，$A_\lambda = A_{\xi_\lambda}$，であり，$\xi_1, \cdots, \xi_{m-n}$ は，$M$ の orthonormal normal basis である．

$R$, $S$, $\tau$ によって，それぞれ，$M$ の curvature tensor，Ricci tensor，scalar curvature を表わすことにすると，

$$(2.7)\quad \tau = n(n+1) - \|\sigma\|^2,$$

$$(2.8)\quad \|S\|^2 = \frac{1}{2}n(n+1)^2 - (n+1)\|\sigma\|^2 + \operatorname{trace}\Big(\sum_\lambda A_\lambda^2\Big)^2,$$

(2,9) $\|R\|^2 = 2n(n+1) - 4\|\sigma\|^2 + 2\sum_{\lambda,\mu}(\mathrm{trace}\, A_\lambda A_\mu)^2$,

(2,10) $-\frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2 = \|\nabla\sigma\|^2 + \frac{(n+2)}{2}\|\sigma\|^2 - 2\,\mathrm{trace}\left(\sum_\lambda A_\lambda^2\right)^2 - \sum_{\lambda,\mu}(\mathrm{trace}\, A_\lambda A_\mu)^2$,

が成り立つことが、知られている。

さらに、

(2,11) $\frac{1}{2}n(n+1)\|R\|^2 \geqq 2n\|S\|^2 \geqq \tau^2$,

が、成り立ち、最初の等号は、M が const. holomorphic sectional curvature をもつときに限り成り立ち、2番目の等号は、M が、Einstein のときに限り、成り立つ

## §3. Kaehler 部分多様体 II.

M を $\mathbb{C}P^m$ の n 次元 Kaehler 部分多様体とする。$TM^{\mathbb{C}}$ を、M の tangent bundle TM の複素化とする。このとき、

$TM^{\mathbb{C}} = TM^+ + TM^-$ (orthogonal sum), であり、各 $TM^\pm$ の fibre $T_pM^\pm$ at $p \in M$ は、$T_pM^{\mathbb{C}}$ の complex structure tensor J の $\pm\sqrt{-1}$ - eigenspace である。同様にして、normal bundle NM の複素化 $NM^{\mathbb{C}}$ に対して、$NM^{\mathbb{C}} = NM^+ + NM^-$ (orthogonal sum).

さらに、$\overline{T_pM^\pm} = T_pM^\mp$, $\overline{N_pM^\pm} = N_pM^\mp$ が成り立つ。

$\mathbb{C}P^m$ 上に、local field of unitary frames $\{e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_m\}$ を選んで、M に制限して、$e_1, \cdots, e_n$ は、M に接しているとする。この frame field に関して、dual frame field を、$\{\omega^1, \cdots, \omega^n, \omega^{n+1}, \cdots, \omega^m\}$ とする。$\mathbb{C}P^m$ の Kaehler metric は、

$\Sigma_{A=1}^{m} \omega^A \cdot \overline{\omega^A}$ によって与えられる．$M$ の induced Kaehler metric $g$ は，$g = \Sigma_{a=1}^{n} \omega^a \cdot \overline{\omega^a}$ によって与えられる．

以下，$a, b, c, \cdots = 1, \cdots, n$ ； $\alpha, \beta, \gamma, \cdots = n+1, \cdots, m$ とする．

$\omega^\alpha$ を $M$ に制限して，

(3, 1) $\omega^\alpha = 0$． を得る．

これを，外微分して，Cartan の Lemma から，

(3, 2) $\omega^\alpha_a = \Sigma_b K^\alpha_{ab} \omega^b$， $K^\alpha_{ab} = K^\alpha_{ba}$，

が，得られる．$K^\alpha_{ab}$ は，second fundamental tensor と呼ばれる．

$M$ の構造方程式は，

(3, 3) $d\omega^a + \Sigma_b \omega^a_b \wedge \omega^b = 0$， $\omega^a_b + \overline{\omega^b_a} = 0$，

(3, 4) $d\omega^a_b + \Sigma_c \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \Omega^a_b$， $\Omega^a_b = \Sigma_{c,d} R^a_{bc\bar{d}} \omega^c \wedge \overline{\omega^d}$，

(3, 5) $d\omega^\alpha_\beta + \Sigma_\gamma \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta = \Omega^\alpha_\beta$， $\Omega^\alpha_\beta = \Sigma_{c,d} R^\alpha_{\beta c\bar{d}} \omega^c \wedge \overline{\omega^d}$，

によって与えられる．このとき，次の基本公式が得られる

(3, 6) $R^a_{bc\bar{d}} = \frac{1}{4}(\delta^a_b \delta_{cd} + \delta^a_c \delta_{bd}) - \Sigma_\alpha K^\alpha_{bc} \overline{K^\alpha_{ad}}$，

(3, 7) $S_{c\bar{d}} = \frac{(n+1)}{2} \delta_{cd} - 2 \Sigma_{\alpha, a} K^\alpha_{ac} \overline{K^\alpha_{ad}}$，

(3, 8) $\tau = n(n+1) - 4 \Sigma_{\alpha, c, d} K^\alpha_{cd} \overline{K^\alpha_{cd}}$，

(3, 9) $R^\alpha_{\beta c\bar{d}} = \frac{1}{4} \delta^\alpha_\beta \delta_{cd} + \Sigma_a K^\beta_{ac} \overline{K^\alpha_{ad}}$．

(2, 7) ~ (2, 9) は，(3, 6) ~ (3, 8) によって，求められる．

さて，$K^\alpha_{ab}$ の高階の共変微分を定義する．

まず,

$$\sum_c K^\alpha_{abc}\omega^c+\sum_c K^\alpha_{ab\bar{c}}\overline{\omega^c}=dK^\alpha_{ab}-\sum_c K^\alpha_{cb}\omega^c_a-\sum_c K^\alpha_{ac}\omega^c_b+\sum_\beta K^\beta_{ab}\omega^\alpha_\beta,$$

このとき,

(3,10) $K^\alpha_{abc}=K^\alpha_{acb}=K^\alpha_{bac}$, $K^\alpha_{ab\bar{c}}=0$ である.

$K^\alpha_{a_1\cdots a_m}$ $(m\geqq 2)$ の共変微分 $K^\alpha_{a_1\cdots a_m a_{m+1}}$, $K^\alpha_{a_1\cdots a_m\bar{a}_{m+1}}$ を, Inductive に定義できる. ここで,

$$\left(\overline{K^\alpha_{a_1\cdots a_m}}\right)_b=\overline{K^\alpha_{a_1\cdots a_m\bar{b}}},\quad \left(\overline{K^\alpha_{a_1\cdots a_m}}\right)_{\bar{b}}=\overline{K^\alpha_{a_1\cdots a_m b}},$$

が, 成り立つ.

<u>Lemma 3,1.</u> [5]

(3,11) $K^\alpha_{a_1\cdots a_m}$ は, $a_1,\cdots,a_m$ に関して symmetric.

(3,12) $K^\alpha_{a_1\cdots a_m\bar{b}}$

$$=\frac{(m-2)}{4}\sum_{r=1}^m K^\alpha_{a_1\cdots\hat{a}_r\cdots a_m}\delta_{a_r b}$$

$$-\sum_{r=1}^{m-2}\frac{1}{r!(m-r)!}\sum_{\sigma,\beta,c}K^\alpha_{ca_{\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(r)}}K^\beta_{a_{\sigma(r+1)}\cdots a_{\sigma(m)}}\overline{K^\beta_{cb}},\quad m\geqq 3$$

ここで, $\sigma$ に関する和は, $(1,\cdots,m)$ のすべての permutations に関してとっている.

## §4. 定理の証明.

Lemma 2,1 と (1,4) から (いま, $M$ は実 $2n$ 次元),

$\lambda_1\leqq n+1$ を得る. 等号が成り立てば, $M$ は order{1} であるから, (1,5) においても等号が成り立つ.

再び，Lemma 2,1 より，

$$0 = \Phi_2 = 2n(n+1)^2 \mathrm{vol}(M) + 2\int_M \|\sigma\|^2 - 2n(n+1)\lambda_1 \mathrm{vol}(M)$$
$$= 2\int_M \|\sigma\|^2 .$$

したがって，$\sigma = 0$，i.e. $M$ は，totally geodesic.

逆に，$\mathbb{C}P^n$ に対して，$\lambda_1 = n+1$ であることは，よく知られている．— 定理 C の証明終り．

定理 A と B の証明は省略する．

また，(1,7) に Lemma 2,1 より

$$0 \leq \Phi_4 = 4n^2\int_M g(H, \Delta H) - 4n^2(\lambda_1+\lambda_2)\int_M g(H,H)$$
$$- 2n\lambda_1\lambda_2\int_M g(P,H)$$
$$= 2n(n+1)^2 \mathrm{vol}(M) + 2\int_M \|\sigma\|^2 - 2n(n+1)(\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{vol}(M)$$
$$+ 2n\lambda_1\lambda_2 \mathrm{vol}(M).$$

これと，(2,7) とから，(0,2) を得る．等号成立の必要十分条件は，$M$ が order$\{1\}$ または，order$\{2\}$ または，order$\{1,2\}$ であるが，定理 A と注意 1 より，order$\{1\}$ の case は，$M$ が totally geodesic で，order$\{2\}$ の case は起こり得ない．order$\{1,2\}$ の case は，immersion が full であれば，定理 B により，

$M$ は Einstein で，$T = t\, g|_{NM\times NM}$ が成り立つ．

$T(\xi,\eta) = \mathrm{trace}\, A_\xi A_\eta$，$\xi,\eta \in NM$ であった．

$A_{J\xi} = JA_\xi$，$A_\xi \circ J = -J\circ A_\xi$ for any $\xi \in NM$

であるから，　$T(J\xi, J\eta) = T(\xi, \eta)$ for any $\xi, \eta \in NM$
が成り立つ

次に，$T$ を $NM^c \times NM^c$ から $\mathbb{C}$ への complex bilinear mapping に拡張すれば，

$$T(N_pM^+, N_pM^+) = 0,\quad T(N_pM^-, N_pM^-) = 0 \quad \text{for any } p \in M$$

を得る．したがって，

(4.1)　$T = k g|_{NM\times NM} \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \sum_{a,b} K^\alpha_{ab}\overline{K^\beta_{ab}} = \frac{k}{2}\delta_{\alpha\beta}$

を得る．このとき，次を得る．

<u>Proposition 1.</u>[13] $M$ を，$\mathbb{C}P^m$ の $n$ 次元 Einstein Kaehler 部分多様体とする．もし，$T = k g|_{NM\times NM}$ ならば，$M$ は，平行部分多様体である

proposition 1 の証明)

$M$ が Einstein なら，(3.7), (3.8), (2.7) より，

$$\sum_{\alpha,a} K^\alpha_{ac}\overline{K^\alpha_{ad}} = \frac{\|\sigma\|^2}{4n}\delta_{cd}$$ が成り立つ

したがって，(3.10) より，

(4.2)　$\sum_{\alpha,a} K^\alpha_{abc}\overline{K^\alpha_{ad}} = 0$．

Lemma 3.1 を用いて，

$$K^\alpha_{abc\bar{d}} = \frac{1}{4}\{K^\alpha_{bc}\delta_{ad} + K^\alpha_{ac}\delta_{bd} + K^\alpha_{ab}\delta_{cd}\} - \sum_{\beta,e}\{K^\alpha_{ea}K^\beta_{bc} + K^\alpha_{eb}K^\beta_{ca} + K^\alpha_{ec}K^\beta_{ab}\}\overline{K^\beta_{ed}}$$

を得るので，これと，(3.10), (4.2) により，

(4.3) $\sum_{\alpha, a, b, c} K^{\alpha}_{abc} \left( \overline{K^{\alpha}_{abcd\bar{d}}} \right) = 0$. を得る.

したがって,

$$
\begin{aligned}
(4.4) \quad 0 &= \sum K^{\alpha}_{abc\bar{d}} \left( \overline{K^{\alpha}_{abc\bar{d}}} \right) + \sum K^{\alpha}_{abc} \left( \overline{K^{\alpha}_{abcdd}} \right) \\
&= \sum K^{\alpha}_{abc\bar{d}} \left( \overline{K^{\alpha}_{abc\bar{d}}} \right) + \frac{3}{4} \sum K^{\alpha}_{abc} \overline{K^{\alpha}_{abc}} \\
&\quad - 3 \sum K^{\alpha}_{abc} \overline{K^{\beta}_{ebc}} K^{\beta}_{ed} \overline{K^{\alpha}_{eda}} ,
\end{aligned}
$$

を得る. $T = k g|_{N M \times N M}$ なら, (4.1) より, $\sum_{a, e} K^{\alpha}_{ae} \overline{K^{\beta}_{ae}} = \frac{k}{2} \delta_{\alpha\beta}$ であり, Einstein なら, $k = const.$ したがって, $\sum_{b, c} K^{\alpha}_{abc} \overline{K^{\beta}_{bc}} = 0$ であり, (4.4) の右辺の第1, 2 項は, 共に, non-negative であるから, 結局, $K^{\alpha}_{abc} = 0$, i.e. M は平行部分多様体である. — proposition 1 の証明終り.

注意5. proposition 1 は, 証明からわかるように, 実際は, T が normal connection に関して平行で, かつ, Ricci tensor が平行であれば, 成り立つ. Proposition 1 により, order{1, 2} ならば, M は, Einstein 平行部分多様体 (totally geodesic は除く) であることがわかる. 逆については, Nagano [4] により, Classical type の compact Hermitian symmetric spaces については, その rank 番目までの eigenvalues が求められていて, しかも, exceptional type $E_6/_{Spin(10) \times T}$ については, §6 で計算されるので, ここで, その値を表1に示しておく. 表1により, 定理2の証明は, 完結し, しかも, Einstein

平行部分多様体(totally geodesic は除く)は，order{1, 2}であることがわかる．以上で，定理1の iii) $\Longleftrightarrow$ iv)(定理B), iv) $\Longrightarrow$ i)(prop. 1), i) $\Longleftrightarrow$ ii), ii) $\Longrightarrow$ iii)(定義から明らか)が既にわかっている．後は，iv)とv)の同値性を示せばよい．そのために，

定義3. $R^\alpha_\beta = \sum_c R^\alpha_{\beta c c}$ とおく．この NM の tensor $R^\alpha_\beta$ を，normal Ricci tensor と呼ぶことにする．

もし，$R^\alpha_\beta = \lambda\,\delta_{\alpha\beta}$ for some real function $\lambda$ on M ならば，NM は Einstein Kaehler metric を許容するということにする．

(3, 9), (2, 7), (3, 8), (4, 1) により，

$$T = \tilde{c}\,g|_{NM\times NM} \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} R^\alpha_\beta = \left\{\frac{n}{4} + \frac{\|\sigma\|^2}{4(m-n)}\right\}\delta_{\alpha\beta}.$$

従って，定義3から，

iv) $\Longleftrightarrow$ v) は，示された．— 定理1の証明終り．

定理3については，$\lambda_1 \leq \int_M \tau \big/ [n\,\mathrm{vol}(M)]$ ならば，(0, 2)により，

$$(n+1-\lambda_1)(n+2-\lambda_2) \geq 0$$ が成り立つ．

従って，M が totally geodesic でなければ，定理Cにより，

$$\lambda_2 \leq n+2$$ を得る．

等号が成り立てば，(0, 2)で等号が成り立つから，M は，Einstein 平行部分多様体である．逆は，表1から従う．

表 1.　Einstein 平行部分多様体 (totally geodesic は除く)

| 部分多様体 | $\dim_{\mathbb{C}}$ | $\tau$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{C}P^n(1/2)$ | $n$ | $n(n+1)/2$ | $(n+1)/2$ | $n+2$ |
| $\mathbb{Q}^n$ | $n$ | $n^2$ | $n$ | $n+2$ |
| $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n$ | $2n$ | $2n(n+1)$ | $n+1$ | $2n+2$ |
| $U(s+2)/U(2)\times U(s)$ $s\geq 3$ | $2s$ | $2s(s+2)$ | $s+2$ | $2s+2$ |
| $SO(10)/U(5)$ | $10$ | $80$ | $8$ | $12$ |
| $E_6/Spin(10)\times T$ | $16$ | $192$ | $12$ | $18$ |

また，次元，$\mathrm{vol}(M)$，$\int_M \tau$ は，spectral invariants [1] であるから，定理4は，定理3から従う

proposition 2.

$M$ を，$\mathbb{C}P^m$ の $n$ 次元 compact Kaehler 部分多様体とし，次の3つの条件をみたすとする：

i) $\lambda_1 = \int_M \tau \Big/ [n\,\mathrm{vol}(M)]$,

ii) $\int_M [\|R\|^2 + 2\|S\|^2] \leq n[(\lambda_1-\lambda_2)(n+1-\lambda_1) + (n+3)\lambda_1]\,\mathrm{vol}(M)$,

iii) 平行部分多様体でない，

このとき，　$\lambda_3 \leq n+3$　である．

等号成立の必要十分条件は，(i), ii), iii) の仮定のもとで)

M が order{1, 2, 3} であることである．

proposition 2 の証明) (1, 8), Lemma 2, 1, (2, 7)〜(2, 9) より，

$$0 \leqq \Phi_5 = 4n^2\int_M g(\Delta H, \Delta H) - 4n^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\int_M g(H, \Delta H)$$

$$+4n^2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\int_M g(H, H) + 2n\lambda_1\lambda_2\lambda_3\int_M g(P, H)$$

$$= 2n\,\mathrm{vol}(M)\Big[(n+1)(n+2)(n+3) - (n+1)(n+2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + (n+1)(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\Big]$$

$$+2(\lambda+\lambda_2+\lambda_3-4n-8)\int_M \tau$$

$$+2\int_M\left[\|R\|^2+2\|S\|^2\right]$$

従って，仮定 i), ii) により．

$$(n+1-\lambda_1)(n+2-\lambda_2)(n+3-\lambda_3) \geqq 0$$ を得る．

仮定 iii) と，定理 3 により， $\lambda_3 \leqq n+3$ を得る．

等号成立の必要十分条件は，注意 1 と 2 を考慮すれば，定理 A，定理 1，仮定 iii) により，M が order{1, 2, 3} であることがわかる． ― proposition 2 の証明終り．

proposition 2 と，表 2, 3 から，次を得る．

## proposition 3.

Degree 3 の compact irreducible Hermitian symmetric 部分多様体と $\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1$ (first-canonical imbedding) は，order{1, 2, 3} である．

表2. Degree 3 の compact irreducible Hermitian symmetric submanifolds

| 部分多様体 | $\dim_{\mathbb{C}}$ | $\tau$ | $\Vert S\Vert^2$ | $\Vert R\Vert^2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{C}P^n(1/3)$ | $n$ | $n(n+1)/3$ | $n(n+1)^2/18$ | $2n(n+1)/9$ | $(n+1)/3$ | $2(n+2)/3$ | $n+3$ |
| $SU(r+3)/S(U(r)\times U(3))$ $r\geq 3$ | $3r$ | $3r(r+3)$ | $3r(r+3)^2/2$ | $6r(3r+1)$ | $r+3$ | $2r+4$ | $3r+3$ |
| $Sp(3)/U(3)$ | 6 | 24 | 48 | 66 | 4 | 7 | 9 |
| $SO(12)/U(6)$ | 15 | 150 | 750 | 660 | 10 | 16 | 18 |
| $SO(14)/U(7)$ | 21 | 252 | 1512 | 1344 | 12 | 20 | 24 |
| $E_7/E_6\times T$ | 27 | 486 | 4374 | 3132 | 18 | 28 | 30 |

表3. Degree 3 の compact reducible Einstein Hermitian symmetric submanifolds

| 部分多様体 | $\dim_{\mathbb{C}}$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{C}P^n\times\mathbb{C}P^n\times\mathbb{C}P^n$ | $3n$ | $n+1$ | $2n+2$ | $2n+4$ |
| $\mathbb{C}P^n\times\mathbb{C}P^{2n+1}(1/2)$ | $3n+1$ | $n+1$ | $2n+2$ | $2n+3$ |
| $\mathbb{C}P^n\times Q^{n+1}$ $(n\geq 2)$ | $2n+1$ | $n+1$ | $n+3$ | $2n+2$ |
| $\mathbb{C}P^n\times[SU(n+1)/S(U(2)\times U(n-1))]$ $n\geq 4$ | $3n-2$ | $n+1$ | $2n$ | $2n+2$ |
| $\mathbb{C}P^7\times[SO(10)/U(5)]$ | 17 | 8 | 12 | 16 |
| $\mathbb{C}P^{11}\times[E_6/Spin(10)\times T]$ | 27 | 12 | 18 | 24 |

§5. 定理5 の証明.

$\hat{R}, \hat{S}, \hat{\tau}, \hat{T}, \hat{G}$ によって, $\hat{M}$ の curvature tensor, Ricci tensor, scalar curvature, 定理Bで定義されているtensor, second fundamental form を表わすことにする．まず，

$$\dim(M)=\dim(\widetilde{M}),\quad Vol(M)=Vol(\widetilde{M}),\quad \int_M \tau=\int_{\widetilde{M}}\widetilde{\tau},$$

$$\int_M\left[2\|R\|^2-2\|S\|^2+5\tau^2\right]=\int_{\widetilde{M}}\left[2\|\widetilde{R}\|^2-2\|\widetilde{S}\|^2+5\widetilde{\tau}^2\right]$$

が成り立つ[1]．$M$, $\widetilde{M}$ は，Einstein であるから，

$$\tau=\widetilde{\tau},\quad \|S\|^2=\|\widetilde{S}\|^2,\quad \int_M\|R\|^2=\int_{\widetilde{M}}\|\widetilde{R}\|^2$$ である．

従って，(2,7)〜(2,11) を用いると，

$$(5,1)\quad \|\sigma\|^2=\|\widetilde{\sigma}\|^2,\quad \int_M\|T\|^2=\int_{\widetilde{M}}\|\widetilde{T}\|^2,\quad \int_M\|\nabla\sigma\|^2=\int_{\widetilde{M}}\|\widetilde{\nabla}\widetilde{\sigma}\|^2$$

が成り立つ．

さらに，$M$ が Einstein ならば，次の量は spectral invariants であることが知られている[10]．

$$(5,2)\quad \int_M\left[-\frac{1}{9}\|\nabla R\|^2+\frac{8}{21}\sum R^*_{ijkl}R^*_{klmn}R^*_{mnij}\right].$$

ここで，$R^*_{ijkl}$ は，curvature tensor $R$ の real local ortho-normal frames に関する成分を示す．次に，

$$(5,3)\quad \sum R^*_{ijkl}R^*_{klmn}R^*_{mnij}=64\sum R^a{}_{bc\bar{d}}R^c{}_{de\bar{f}}R^e{}_{fa\bar{b}}$$

$$=n(n+1)(n+3)-2(n+3)\|\sigma\|^2+\frac{2}{n}\|\sigma\|^4+4\|T\|^2$$

$$-64\sum K^\alpha_{ab}\overline{K^\beta_{bc}}K^\gamma_{cd}\overline{K^\alpha_{de}}K^\beta_{ef}\overline{K^\gamma_{fa}}.$$

(5,1)〜(5,3) により，

$$(5.4)\quad \int_M \left[ -\frac{1}{9}\|\nabla R\|^2 - \frac{512}{21}\sum K^{\alpha}_{ab}\overline{K^{\beta}_{bc}}\,K^{\gamma}_{cd}\overline{K^{\alpha}_{de}}\,K^{\beta}_{ef}\overline{K^{\gamma}_{fa}} \right]$$

は，spectral invariant である．

ここで，$A_m = \sum_{\alpha, a_1, \cdots, a_m} K^{\alpha}_{a_1\cdots a_m}\overline{K^{\alpha}_{a_1\cdots a_m}}$ とおく．$(m \geqq 2)$．

このとき，

$$\int_M A_4 = -\int_M \sum K^{\alpha}_{abcd\bar{\alpha}}\overline{K^{\alpha}_{abc}}$$

であるから，Lemma 3.1 を用いて，この量を計算し，(5.1) と (5.4) を考慮すると，

$$\int_M \left[ -\frac{1}{9}\|\nabla R\|^2 + \frac{256}{63}\sum K^{\alpha}_{abc}\overline{K^{\alpha}_{de}}\,K^{\beta}_{de}\overline{K^{\beta}_{abc}} - \frac{256}{63}A_4 \right]$$

という量は，spectral invariant であることがわかる．

次に，$\|\nabla R\|^2 = 64\sum K^{\alpha}_{abc}\overline{K^{\alpha}_{de}}\,K^{\beta}_{de}\overline{K^{\beta}_{abc}}$．であることが確かめられるので，$\int_M\left[3\|\nabla R\|^2 + 256 A_4\right]$ という量は，spectral invariant であることがわかる．　ここで，

<u>Lemma 5.1.</u> [11]

$\tilde{M}$ を $\mathbb{C}P^m$ の degree $r$ の compact Hermitian symmetric 部分多様体で，imbedding は full とする．このとき，

$A_r \neq 0$，$A_{r+1} = 0$　が成り立つ．

Lemma 5.1 と定理 5 の仮定により，

$\int_M\left[3\|\nabla R\|^2 + 256 A_4\right] = 0$　が得られる．

$\|\nabla R\|^2 \geqq 0$，$A_4 \geqq 0$ であるから，結局，$\nabla R = 0$，$A_4 = 0$，

が得られ，M は，compact Hermitian symmetric 部分多様体で，degree $\leqq 3$ となる．ここで，表1～3と，対称空間の埋めこみの分類[5]により，定理の結論は得られる．

§6. 固有値の計算．([3], [12], [14] を参照)

$(G, K)$ を Rieman. symmetric pair とし，$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$ によって，それぞれ，$G$，$K$ の Lie algebra を表わすことにする．このとき，標準分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を得る．$\Pi(G) := \{\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\}$ を fundamental root system とし，$N_1, \cdots, N_\ell$ を $2(N_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = \delta_{ij}$ for $N_i \in \mathfrak{t}$ で定義される $\mathfrak{g}$ の fundamental weights とする，ここで，$\mathfrak{t}$ は，$\mathfrak{m}$ に含まれる $\mathfrak{g}$ の maximal Abelian subalgebra を含む $\mathfrak{g}$ の maximal Abelian subalgebra であり，$(\ ,\ )$ は，$\mathfrak{t}$ 上の内積である．また，$\ell = \mathrm{rank}(G)$．次に，$M_i$ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の fundamental weights とする．(これを定義するには，いろいろと準備が必要なので省略するが，これは，佐竹-図形から求められる)．次の事実が知られている．

<u>Fact 1.</u> $(G, K)$ を compact symmetric pair とし，$G/K$ は，単連結であるとする．ここで，

$$D(G, K) := \left\{ \sum_{i=1}^{s} m_i M_i \;\middle|\; m_i \in \mathbb{Z},\ m_i \geqq 0,\ 1 \leqq i \leqq s \right\}$$

とおく．$\rho$ を，$K$ に関する $G$ の球表現とするとき，$\mathfrak{t}$ に関する $\rho$ の highest weight $\lambda(\rho)$ は，$D(G, K)$ に属する．

Fact 2. 写像: $\rho \longrightarrow \lambda(\rho)$ は bijective である.

さて, $E_6/Spin(10)\times T$ の $\Delta$ の eigenvalues を計算する.

まず, [2] により,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1+e_8) - \frac{1}{2}(e_2+\cdots+e_7),\quad \alpha_2 = e_1+e_2,\quad \alpha_3 = e_2-e_1,$$

$$\alpha_4 = e_3-e_2,\quad \alpha_5 = e_4-e_3,\quad \alpha_6 = e_5-e_4,$$

ここで, $e_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^8$ for $i=1,\cdots,8$.

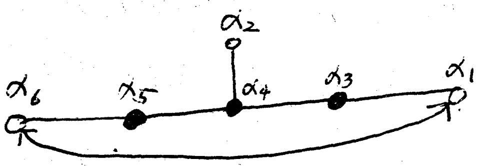
$$N_1 = \frac{2}{3}(e_8-e_7-e_6),\quad N_2 = \frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5-e_6-e_7+e_8),$$

$$N_3 = \frac{5}{6}(e_8-e_7-e_6)+\frac{1}{2}(-e_1+e_2+e_3+e_4+e_5),\quad N_4 = e_3+e_4+e_5-e_6-e_7+e_8,$$

$$N_5 = \frac{2}{3}(e_8-e_7-e_6)+e_4+e_5,\quad N_6 = \frac{1}{3}(e_8-e_7-e_6)+e_5.$$

ここで, $\delta(G) := \sum_i N_i = e_2+2e_3+3e_4+4e_5+4(e_8-e_7-e_6).$

左の図形により, $M_i$ は次で与えられる.




$$M_1 = N_1+N_6 = e_8-e_7-e_6+e_5,$$

$$M_2 = N_2 = \frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5-e_6-e_7+e_8).$$

Fact 1, 2 から, $\lambda(\rho) = m_1M_1 + m_2M_2$. 従って, Freudenthal の公式により, 既約表現 $\rho$ の Casimir operator の eigenvalue $A_\rho$ は, 次で与えられる.

$$A_\rho = \frac{1}{2}\left(\lambda(\rho)+2\delta(G), \lambda(\rho)\right) = 2m_1(m_1+m_2+8)+m_2(m_2+11).$$

$\Delta$ の eigenvalues $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$ は, $A_\rho$ で与えられるので,

$$\lambda_1 = 12\ (m_1=0,\ m_2=1),\quad \lambda_2 = 18\ (m_1=1,\ m_2=0),\ \cdots$$

を得る. $E_7/E_6\times T$ についても, 同様にして,

$$A_p = m_1^2 + 2m_2^2 + 3m_3^2 + 2m_1m_2 + 4m_2m_3 + 2m_3m_1 + 17m_1 + 26m_2 + 27m_3,$$

$\lambda_1 = 18 \ (m_1 = 1,\ m_2 = m_3 = 0),\quad \lambda_2 = 28\ (m_1 = m_3 = 0,\ m_2 = 1),$

$\lambda_3 = 30\ (m_1 = m_2 = 0,\ m_3 = 1),\ \cdots\cdots .$

## References.


[1] M. Berger, P. Gauduchon and E. Mazet, le spectre d'une variete Riemannienne, Lecture Notes in Math, No. 194, Springer-Verlag. Berlin 1971.

[2] N. Bourbaki, Elements de Mathematique, Groupes et Algebres de Lie, Herman, Paris, (1968).

[3] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, New-York–London, 1978.

[4] T. Nagano, On the minimum eigenvalues of the Laplacians in Riemannian manifolds, Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo, 11 (1961), 177–182.

[5] H. Nakgawa and R. Takagi, On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 638–667.

[6] M. Obata, Riemannian manifolds admitting a solution of a certain system of differential equations, Proc. U.S.-Japan Sem. Diff. Geom., Kyoto Japan 1965, Nihon Hyoronsha, Tokyo, 1966.

[7] K. Ogiue, Differential geometry of Kaehler submanifolds, Advances in Math., 13 (1974), 73–114.

[8] A. Ros, Spectral geometry of CR-minimal submanifolds in the complex projective space, Kodai Math. J., 6 (1983), 88-99.

[9] A. Ros, On spectral geometry of Kaehler submanifolds, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 433-448.

[10] T. Sakai, On eigenvalues of Laplacian and curvature of Riemannian manifold, Tohoku Math. J., 23 (1971), 589-603.

[11] R. Takagi and M. Takeuchi, Degree of symmetric Kaehlerian submanifolds of a complex projective space, Osaka J. Math., 14 (1977), 501-518.

[12] M. Takeuchi, Polynomial representations associated with symmetric bounded domains, Osaka J. Math., 10 (1973), 441-475.

[13] S. Udagawa, Einstein parallel Kaehler submanifolds in a complex projective space, to appear in Tokyo J. Math.

[14] S. Udagawa, Spectral geometry of Kaehler submanifolds of a complex projective space, to appear in J. Math. Soc. Japan.